姿勢運動学

中条 俊大

最終改訂: 2026 年 10 月

本資料は，東京工業大学の松永三郎教授の講義資料（宇宙ステーション入門（東京大学出版会）の 6 章の抜粋をベースに修正・追記したもの）をもとに作成したものである．内容を一部削減し，変数の定義などは一部変更している．

1 はじめに

宇宙機の姿勢運動における運動学（kinematics）とは，姿勢角と角速度の関係を考える学問である．物体の姿勢（回転角）を表現する方法は様々あり，それぞれの方法で用いる（姿勢を表現する）パラメータの時間微分と角速度の関係を求めることが目的である．本稿では，それら全ての基礎となるベクトル表現を出発点とし，座標変換行列，角速度の定義を行った後，代表的な回転の表現についてそれぞれパラメータの時間微分と角速度の関係を導出する．

2 ベクトル表現

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対してそのなす角を θ とすると，次の演算が定義されている．

- 内積:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{1}$$

- 外積:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta\boldsymbol{c} \tag{2}$$

  ただし，$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトル（$|\boldsymbol{c}|=1$）であり，その方向は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平面内で $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に向かって回したとき（回す角度が θ となる）に右ねじが進む方向である．

以降，これらの演算やベクトル，行列の基本法則に則り数式処理を行う．

右手系正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ を有する直交座標系 A 系を定義する．これらの基底ベクトルは次の条件を満たす．

- 内積:

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_3=1 \tag{3}$$
$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_1=0 \tag{4}$$

- 外積:

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0} \tag{5}$$
$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1,\quad \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2 \tag{6}$$

次式が成り立つことは容易に確認できる．

$$[\boldsymbol{a}]^T[\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{a}]^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{7}$$

ただし，$[\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3]^T$ とする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，基底ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の一次結合により表せる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= {}^A x_1 \boldsymbol{a}_1 + {}^A x_2 \boldsymbol{a}_2 + {}^A x_3 \boldsymbol{a}_3 \\ &= [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} {}^A x_1 \\ {}^A x_2 \\ {}^A x_3 \end{bmatrix} \\ &= [\boldsymbol{a}]^T {}^A x\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，${}^A x = [{}^A x_1,\ {}^A x_2,\ {}^A x_3]^T$ であり，${}^A x_1$，${}^A x_2$，${}^A x_3$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の A 系における成分という．${}^A x$ はこれらを並べたもの（細字表記）であり，$\boldsymbol{x}$（太字表記）とは異なることに注意されたい．A 系で成分表示した行列 ${}^A X$ に対して $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{a}]^T {}^A X [\boldsymbol{a}]$ をダイアディックと呼ぶが，これらも細字と太字で表記を分けている．式 (8) と $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の内積をとると

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_1 = {}^A x_1, \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_2 = {}^A x_2, \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_3 = {}^A x_3 \tag{9}$$

となる．つまり，あるベクトルの成分を求めるためには，対応する基底ベクトルとの内積をとればよい．また，任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}]^T x$（$x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$），$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{a}]^T y$（$y = [y_1,\ y_2,\ y_3]^T$）に対して，内積と外積はそれぞれ次のように成分表示される．

- 内積:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{10}$$

- 外積:

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{a}]^T x^{\times} y = [\boldsymbol{a}]^T \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

ただし，

$$x^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

と定義する．

さらに，次の演算を定義する．

$$\boldsymbol{xy} = [\boldsymbol{a}]^T x y^T [\boldsymbol{a}] \tag{13}$$

式 (10)，(11)，(13) は，同一の演算をベクトル（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$）で表現する場合と成分を並べた列（x，y）で表示する場合で表記法が異なることを意味しており，例えば，$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$ や $x \cdot y$ とは書かない．ただし，あくまで便宜上表記が異なるだけであり，必要に応じて表記法を使い分ければよい．本稿でも場面に応じて適切な表記法を選び議論を行う．

3 座標変換行列

右手系正規直交基底 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$（$[\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3]^T$）を有する直交座標系 B 系を定義し，2 つの座標系 A 系と B 系の相対関係について調べる．式 (8) と同様に，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ を用いて次のように表される．

$$\boldsymbol{b}_1 = C_{11} \boldsymbol{a}_1 + C_{12} \boldsymbol{a}_2 + C_{13} \boldsymbol{a}_3 \tag{14}$$
$$\boldsymbol{b}_2 = C_{21} \boldsymbol{a}_1 + C_{22} \boldsymbol{a}_2 + C_{23} \boldsymbol{a}_3 \tag{15}$$
$$\boldsymbol{b}_3 = C_{31} \boldsymbol{a}_1 + C_{32} \boldsymbol{a}_2 + C_{33} \boldsymbol{a}_3 \tag{16}$$

行列形式で書けば

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

右辺の係数行列を $C^{B/A}$ とおけば

$$[\boldsymbol{b}] = C^{B/A} [\boldsymbol{a}] \tag{18}$$

となる．ここで，$C^{B/A}$ を A 系から B 系への座標変換行列または方向余弦行列（Direction Cosine Matrix (DCM)）と呼ぶ．式 (18) より

$$C^{B/A} = [\boldsymbol{b}]\,[\boldsymbol{a}]^{-1} = [\boldsymbol{b}]\,[\boldsymbol{a}]^{T} \tag{19}$$

である．

さて，式 (14) と $\boldsymbol{a}_1$ の内積をとると $\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = C_{11}$ となる．同様にして，$i,\ j = 1,\ 2,\ 3$ に対して

$$C_{ij} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}_j \tag{20}$$

が成り立つ．行列形式で書くと

$$C^{B/A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

となる．式 (21) より，座標変換行列の列成分は A 系基底ベクトルを B 系で表した成分，行成分は B 系基底ベクトルを A 系で表した成分となっていることが分かる．式 (18) に左から $C^{B/A^{-1}}$ を掛けると

$$C^{B/A^{-1}}\,[\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}] \tag{22}$$

となる．一方，A 系と B 系を入れ替えて同様の議論をすれば，式 (18) と同様に

$$[\boldsymbol{a}] = C^{A/B}\,[\boldsymbol{b}] \tag{23}$$

が得られる．また，式 (21) と同様に

$$C^{A/B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

が得られる．式 (22)，(23) から

$$C^{B/A^{-1}} = C^{A/B} \tag{25}$$

であり，式 (21)，(24) から

$$C^{B/A^{T}} = C^{A/B} \tag{26}$$

となることが分かる．さらに，式 (25)，(26) から

$$C^{B/A^{T}} = C^{B/A^{-1}} \tag{27}$$

となるため，座標変換行列は直交行列であることが分かる．

次に，式 (8) と同様にベクトル $\boldsymbol{x}$ を B 系で成分表示した場合，${}^{B}x = [{}^{B}x_1,\ {}^{B}x_2,\ {}^{B}x_3]^{T}$ として

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{b}]^{T}\,{}^{B}x \tag{28}$$

となり，式 (18) とあわせると

$${}^{B}x = [\boldsymbol{b}]\,[\boldsymbol{a}]^{T}\,{}^{A}x = C^{B/A}\,{}^{A}x \tag{29}$$

となる．つまり，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ の A 系での成分表示を B 系での成分表示に変換する場合も，同様に $C^{B/A}$ を掛ければよいと分かる．

簡単な例を示す．A 系を $\boldsymbol{a}_3$ 軸回りに θ だけ回転すると B 系に一致する場合（図 1），幾何学的関係から次式が示される．

$$C^{B/A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

この座標変換行列について，上記で示した関係が全て成立することは容易に確認できる．

3 つ以上の直交座標系がある場合も同様である．第三の座標系を C 系とすると

$$C^{C/A} = C^{C/B}C^{B/A} \tag{31}$$

$${}^{C}x = C^{C/B}\,{}^{B}x = C^{C/A}\,{}^{A}x = C^{C/B}C^{B/A}\,{}^{A}x \tag{32}$$

となることは容易に示される．

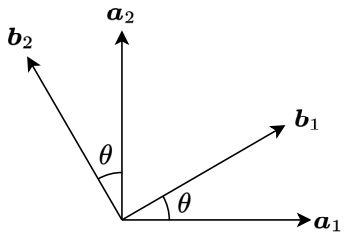


図 1　A 系と B 系の関係の例.

4　角速度

座標変換行列に基づいて角速度を定義する．まず，A 系を基準とする（A 系から見た）時間微分の演算子を $\frac{{}^A\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と定義する．基底ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の時間微分については

$$\frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1}{\mathrm{d}t} = \frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \tag{33}$$

である．これは基底ベクトルが A 系に固定されていることを示す．また一般のスカラー変数に対しては通常の時間微分として作用すると定義する．任意のベクトル $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}]^T\,{}^A x$ については

$$\frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = [\boldsymbol{a}]^T\,{}^A\dot{x} \tag{34}$$

となる．ドットは通常の時間微分を表す．式 (34) から，A 系を基準とする時間微分は A 系で表された成分を時間微分することを意味する．一方，$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B x$ と表現する場合

$$\begin{aligned}
\frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{{}^A\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{b}]^T\right){}^B x + [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\dot{x} \\
&= \left(\frac{{}^A\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{a}]^T C^{B/A^T}\right){}^B x + [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\dot{x} \\
&= [\boldsymbol{a}]^T \dot{C}^{B/A^T}\,{}^B x + [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\dot{x} \\
&= [\boldsymbol{b}]^T C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T}\,{}^B x + [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\dot{x}
\end{aligned} \tag{35}$$

となる．ここで，$C^{B/A}C^{B/A^T} = E$（単位行列）の両辺を時間微分すると

$$\dot{C}^{B/A}C^{B/A^T} + C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T} = O \tag{36}$$

であるから

$$C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T} = -\dot{C}^{B/A}C^{B/A^T} = -\dot{C}^{B/A^{TT}}C^{B/A^T} = -\left(C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T}\right)^T \tag{37}$$

となる．つまり，$C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T}$ は交代行列である．一般に，3×3 交代行列 W について

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \tag{38}$$

とすると，$W^T = -W$ より

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{21} & W_{31} \\ W_{12} & W_{22} & W_{32} \\ W_{13} & W_{23} & W_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \tag{39}$$

が成り立つ．したがって，

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -W_{21} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & -W_{32} \\ -W_{13} & W_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

と表せる．$W_{32} = -W_{23} = \omega_1$，$W_{13} = -W_{31} = \omega_2$，$W_{21} = -W_{12} = \omega_3$ とおけば

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

となる．したがって，

$$C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^B\omega_3 & {}^B\omega_2 \\ {}^B\omega_3 & 0 & -{}^B\omega_1 \\ -{}^B\omega_2 & {}^B\omega_1 & 0 \end{bmatrix} = {}^B\omega^{\times} \tag{42}$$

と定義できる．ただし，${}^B\omega = [{}^B\omega_1,\ {}^B\omega_2,\ {}^B\omega_3]^T$ である．これより式 (35) は次式のように整理される．

$$\begin{aligned} \frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} &= [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\omega^{\times}\,{}^Bx + [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\dot{x} \\ &= \boldsymbol{\omega}^{B/A} \times \boldsymbol{x} + \frac{{}^B\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{43}$$

ここで，

$$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\omega \tag{44}$$

とした（簡単のため ${}^B\omega^{B/A}$ を ${}^B\omega$ と表記する）．これが A 系に対する B 系の角速度ベクトルである．その B 系における成分表示は座標変換行列から式 (42) によって求められる．また A 系で成分表示する場合，すなわち，${}^A\omega = [{}^A\omega_1,\ {}^A\omega_2,\ {}^A\omega_3]^T$ として

$$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\boldsymbol{a}]^T\,{}^A\omega \tag{45}$$

と考える場合（簡単のため ${}^A\omega^{B/A}$ を ${}^A\omega$ と表記する）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{B/A} \times \boldsymbol{x} &= [\boldsymbol{b}]^T\,{}^B\omega^{\times}\,{}^Bx \\ &= [\boldsymbol{a}]^T\,C^{B/A^T}C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T}C^{B/A}\,{}^Ax \\ &= [\boldsymbol{a}]^T\,\dot{C}^{B/A^T}C^{B/A}\,{}^Ax \end{aligned} \tag{46}$$

であることから

$$\dot{C}^{B/A^T}C^{B/A} = {}^A\omega \tag{47}$$

であることがいえる．$\boldsymbol{\omega}^{B/A}$ の A 系における成分表示は，座標変換行列から式 (47) によって求められる．

式 (43) において $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ とすれば，B 系の基底ベクトルの時間微分が次式の通り得られる．

$$\frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{b}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}^{B/A} \times \boldsymbol{b}_i \ \ (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{48}$$

また，式 (42) から，座標変換行列の時間微分は次のように表せる．

$$\dot{C}_{11} = {}^B\omega_3 C_{21} - {}^B\omega_2 C_{31}, \quad \dot{C}_{12} = {}^B\omega_3 C_{22} - {}^B\omega_2 C_{32}, \quad \dot{C}_{13} = {}^B\omega_3 C_{23} - {}^B\omega_2 C_{33} \tag{49}$$

$$\dot{C}_{21} = {}^B\omega_1 C_{31} - {}^B\omega_3 C_{11}, \quad \dot{C}_{22} = {}^B\omega_1 C_{32} - {}^B\omega_3 C_{12}, \quad \dot{C}_{23} = {}^B\omega_1 C_{33} - {}^B\omega_3 C_{13} \tag{50}$$

$$\dot{C}_{31} = {}^B\omega_2 C_{11} - {}^B\omega_1 C_{21}, \quad \dot{C}_{32} = {}^B\omega_2 C_{12} - {}^B\omega_1 C_{22}, \quad \dot{C}_{33} = {}^B\omega_2 C_{13} - {}^B\omega_1 C_{23} \tag{51}$$

さらに，3 つの座標変換行列 $C^{B/A}$，$C^{C/B}$，$C^{C/A}$ に対する角速度ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\omega}^{B/A}$，$\boldsymbol{\omega}^{C/B}$，$\boldsymbol{\omega}^{C/A}$ とすると，次の関係式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\omega}^{C/A} = \boldsymbol{\omega}^{C/B} + \boldsymbol{\omega}^{B/A} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{A/B} = -\boldsymbol{\omega}^{B/A} \tag{53}$$

簡単な例を示す．A 系を $\boldsymbol{a}_3$ 軸回りに θ だけ回転すると B 系に一致する場合，式 (30) より

$$\begin{aligned} C^{B/A}\dot{C}^{B/A^T} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{54}$$

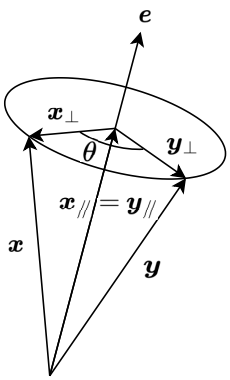


図 2　一軸回転による回転変換のイメージ.

となる．したがって

$$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{55}$$

である．

5　回転の表現

前節までは座標変換行列を 9 つの成分（方向余弦）で表したが，本節では回転を表す幾何学的な量と結びつけて考える．一般に剛体の回転の自由度は 3 である．なぜなら，回転は座標変換行列で特徴付けられるが，その行列の 3 つの列を考えるとき，その大きさはそれぞれ 1 であること，互いが直交すること，計 6 つの拘束条件があるためである．結局，その独立なパラメータの数は 9 つから 6 つを引いた 3 つとなり，9 つのパラメータの使用は冗長である．本節では座標変換行列を 9 つより少ない数のパラメータで表現することを考える．

5.1　オイラー回転軸と回転角

任意の回転はある一軸回りの回転で表現できることをオイラー（Euler）の定理という．まず，この定理を証明する．A 系から B 系への座標変換行列 $C^{B/A}$ に対応する一軸回転が存在すると仮定し，その回転軸（オイラー回転軸と呼ぶ）の単位方向ベクトルを $\boldsymbol{e}$，回転角を右ねじの方向を正として θ とする．このとき $\boldsymbol{e}$ の成分は A 系と B 系で変わらないため，$\boldsymbol{e} = [\boldsymbol{a}]^T {}^A e = [\boldsymbol{b}]^T {}^B e$ とすると ${}^A e = {}^B e \equiv e$ である．一方，

$$\boldsymbol{e} = [\boldsymbol{a}]^T e = [\boldsymbol{b}]^T C^{B/A} e \tag{56}$$

であるため

$$C^{B/A} e = e \tag{57}$$

が成り立つ．式 (57) は $C^{B/A}$ が固有値 1 に対応する固有ベクトル e を有することを意味している．したがって，$C^{B/A}$ が固有値 1 を有することを示せばよい．$C^{B/A}$ の固有値を λ とすると，特性方程式は

$$\left| C^{B/A} - \lambda E \right| = 0 \tag{58}$$

である．$C^{B/A}$ が 3×3 直交行列であることを利用すると，式 (58) は次式のように整理される．

$$-(\lambda - 1)\left\{ \lambda^2 - \left(\mathrm{tr} C^{B/A} - 1 \right) \lambda + 1 \right\} = 0 \tag{59}$$

式 (59) より $C^{B/A}$ は確かに固有値 1 を有することが分かる．以上によりオイラーの定理が示された．

e および θ と $C^{B/A}$ の関係を求める．図 2 を参照し，幾何学的に求めることとする．まず，A 系に固定されたベクトル $\boldsymbol{x}$ と，A 系を $\boldsymbol{e}$ 回りに θ だけ回転させることで得られる B 系に固定されたベクトル $\boldsymbol{y}$ を考える．ただし，回転

前は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は一致しているものとする．このとき A 系における $\boldsymbol{x}$ の成分と B 系における $\boldsymbol{y}$ の成分は等しいので，これを x とおくと

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}]^T x \tag{60}$$

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{b}]^T x \tag{61}$$

と表せる．さて，回転軸 $\boldsymbol{e}$ 方向について，平行成分を下付き文字 //，垂直成分を下付き文字 $\perp$ で表すことにする．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{//} + \boldsymbol{x}_{\perp} \tag{62}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{//} + \boldsymbol{y}_{\perp} \tag{63}$$

このとき，幾何学的関係から

$$\boldsymbol{x}_{//} = \boldsymbol{y}_{//} = (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{x} \tag{64}$$

$$\boldsymbol{y}_{\perp} = \cos\theta \boldsymbol{x}_{\perp} + \sin\theta \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x}_{\perp} \tag{65}$$

が成り立つ．式 (62)，(63)，(64)，(65) より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}_{//} + \cos\theta \boldsymbol{x}_{\perp} + \sin\theta \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x}_{\perp} \\
&= \boldsymbol{x}_{//} + \cos\theta \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{//}\right) + \sin\theta \boldsymbol{e} \times \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{//}\right) \\
&= \left(\cos\theta \boldsymbol{E} + \sin\theta \boldsymbol{e}^{\times}\right) \boldsymbol{x} + (1 - \cos\theta)\,\boldsymbol{x}_{//} \\
&= \left\{\cos\theta \boldsymbol{E} + (1 - \cos\theta)\,\boldsymbol{e}\boldsymbol{e} + \sin\theta \boldsymbol{e}^{\times}\right\} \boldsymbol{x} \\
&\equiv \boldsymbol{R}^{B/A} \boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{66}$$

が得られる．$\boldsymbol{R}^{B/A} = \cos\theta \boldsymbol{E} + (1 - \cos\theta)\,\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T + \sin\theta \boldsymbol{e}^{\times}$ は回転ダイアディックと呼ばれる．ただし，$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{a}]^T E [\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b}]^T E [\boldsymbol{b}]$（単位ダイアディック），$\boldsymbol{e}^{\times} = [\boldsymbol{a}]^T e^{\times} [\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b}]^T e^{\times} [\boldsymbol{b}]$（外積ダイアディック）である．改めて式 (66) を成分で表示すると次式のようになる．

$$[\boldsymbol{b}]^T x = [\boldsymbol{a}]^T \left\{\cos\theta E + (1 - \cos\theta)\,ee^T + \sin\theta e^{\times}\right\} x \tag{67}$$

式 (67) は任意の x について成り立つので

$$[\boldsymbol{b}]^T = [\boldsymbol{a}]^T \left\{\cos\theta E + (1 - \cos\theta)\,ee^T + \sin\theta e^{\times}\right\} \tag{68}$$

となる．式 (18)，(68) より次式が得られる．

$$C^{B/A} = [\boldsymbol{b}]\,[\boldsymbol{a}]^T = \left([\boldsymbol{a}]\,[\boldsymbol{b}]^T\right)^T = \cos\theta E + (1 - \cos\theta)\,ee^T - \sin\theta e^{\times} \tag{69}$$

ここで，$(ee^T)^T = ee^T$，$e^{\times^T} = -e^{\times}$ であることを用いた．

次に，逆に e および θ を $C^{B/A}$ を用いて表すことを考える．式 (69) に対して tr をとると

$$\mathrm{tr} C^{B/A} = 1 + 2\cos\theta \tag{70}$$

すなわち，

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr} C^{B/A} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(C_{11} + C_{22} + C_{33} - 1\right) \tag{71}$$

が得られる．さらに式 (69) より，$e = [e_1,\ e_2,\ e_3]^T$ として

$$\begin{bmatrix} C_{32} - C_{23} \\ C_{13} - C_{31} \\ C_{21} - C_{12} \end{bmatrix} = -2\sin\theta e \tag{72}$$

すなわち，$\theta \neq n\pi$（n は整数）のとき

$$e = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{bmatrix} \tag{73}$$

となる．$\theta = n\pi$ のときは e は一意には定まらないが，自明な回転変換である．以上により e および θ と $C^{B/A}$ の関係が求められた．

$C^{B/A}$ を改めて $C^e(\theta)$ と表すと，式 (69) は次式のように成分表示される．

$$C^e(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta + e_1^2(1-\cos\theta) & e_3\sin\theta + e_1e_2(1-\cos\theta) & -e_2\sin\theta + e_1e_3(1-\cos\theta) \\ -e_3\sin\theta + e_1e_2(1-\cos\theta) & \cos\theta + e_2^2(1-\cos\theta) & e_1\sin\theta + e_2e_3(1-\cos\theta) \\ e_2\sin\theta + e_1e_3(1-\cos\theta) & -e_1\sin\theta + e_2e_3(1-\cos\theta) & \cos\theta + e_3^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix} \tag{74}$$

$C^e(\theta)^{-1} = C^e(-\theta) = C^e(\theta)^T$ であることに注意されたい．θ が微小のとき，式 (74) は次のように近似できる．

$$C^e(\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 & e_3\theta & -e_2\theta \\ -e_3\theta & 1 & e_1\theta \\ e_2\theta & -e_1\theta & 1 \end{bmatrix} \tag{75}$$

また，回転軸ベクトル $\boldsymbol{e}$ が時間によって変化しない場合，その回転変換を単純回転変換と呼ぶ．$e = [1,\ 0,\ 0]^T$，$e = [0,\ 1,\ 0]^T$，$e = [0,\ 0,\ 1]^T$ とすると各基底ベクトルに対応する単純回転変換となり，座標変換行列をそれぞれ $C_1(\theta)$，$C_2(\theta)$，$C_3(\theta)$ とすると

$$C_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad C_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad C_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{76}$$

となる．これらは幾何学的にも容易に求められる．

5.2 オイラー回転軸と回転角による角速度表現

オイラー回転軸および回転角と角速度の関係を求める．まず，式 (57) と同様に $C^{A/B}e = e$ が成り立つ．これを時間微分すると

$$\dot{C}^{A/B}e + C^{A/B}\dot{e} = \dot{e} \tag{77}$$

となる．式 (77) に左から $C^{B/A}$ を掛け，式 (42) も考慮すれば

$${}^B\omega^\times e + \dot{e} = C^{B/A}\dot{e} \tag{78}$$

すなわち，

$$e^{\times\,B}\omega = \left(E - C^{B/A}\right)\dot{e} \tag{79}$$

が得られる．ここで，式 (42) に左から C^{B/A^T} を掛けると

$$\dot{C}^{B/A^T} = C^{B/A^T\,B}\omega^\times \tag{80}$$

となる．式 (80) に対して tr をとり，式 (70) も考慮すれば次式のようになる．

$$-2\dot{\theta}\sin\theta = \mathrm{tr}\left(C^{B/A^T\,B}\omega^\times\right) \tag{81}$$

また，一般に対称行列 S と交代行列 W に対して，$\mathrm{tr}(SW) = \mathrm{tr}(WS) = 0$ であること，および一般にベクトル x，y に対して，$\mathrm{tr}(x^\times y^\times) = -2x^Ty$ が成り立つこと（容易に証明可能）を用いれば，式 (69) から次式が得られる．

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(C^{B/A^T\,B}\omega^\times\right) &= \sin\theta\,\mathrm{tr}\left(e^{\times\,B}\omega^\times\right) \\ &= -2\sin\theta e^{T\,B}\omega \end{aligned} \tag{82}$$

式 (81)，(82) より次式が得られる．

$$\dot{\theta} = e^{T\,B}\omega \tag{83}$$

式 (83) は $\boldsymbol{\omega}^{B/A}$ の $\boldsymbol{e}$ 方向平行成分が $\dot{\theta}$ であることを意味している．したがって，$\boldsymbol{\omega}^{B/A}$ の $\boldsymbol{e}$ 方向垂直成分を $\boldsymbol{\omega}_\perp^{B/A}$（$\boldsymbol{\omega}_\perp^{B/A} = [\boldsymbol{b}]^{T\,B}\omega_\perp$）とすると

$${}^B\omega = \dot{\theta}e + {}^B\omega_\perp \tag{84}$$

となる．さて，式 (79) は改めて

$$e^{\times\,B}\omega_{\perp} = \left(E - C^{B/A}\right)\dot{e} \tag{85}$$

と表せる．式 (84) に左から $e^{\times}$ を掛けると，$e^{\times}e^{\times} = ee^{T} - E$（容易に証明可能），${e^{T}}^{B}\omega_{\perp} = 0$ であることも用いて

$$-{}^{B}\omega_{\perp} = e^{\times}\left(E - C^{B/A}\right)\dot{e} \tag{86}$$

となる．式（69）(84)，(86) より次式が得られる．

$$\begin{aligned}
{}^{B}\omega &= \dot{\theta}e - e^{\times}\left\{(1-\cos\theta)\cdot E - (1+\cos\theta)\,ee^{T} + \sin\theta e^{\times}\right\}\dot{e} \\
&= \dot{\theta}e - (1-\cos\theta)\,e^{\times}\dot{e} - \sin\theta e^{\times}e^{\times}\dot{e} \\
&= \dot{\theta}e + \sin\theta\dot{e} - (1-\cos\theta)\,e^{\times}\dot{e} \\
&= \begin{bmatrix} e_1\dot{\theta} + \dot{e}_1\sin\theta - (e_2\dot{e}_3 - e_3\dot{e}_2)(1-\cos\theta) \\ e_2\dot{\theta} + \dot{e}_2\sin\theta - (e_3\dot{e}_1 - e_1\dot{e}_3)(1-\cos\theta) \\ e_3\dot{\theta} + \dot{e}_3\sin\theta - (e_1\dot{e}_2 - e_2\dot{e}_1)(1-\cos\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{87}$$

ここで，$e^{T}\dot{e} = 0$ であることを用いた．式 (87) は特に，単純回転変換の場合は $\dot{e} = 0$ となるので

$${}^{B}\omega = \dot{\theta}e \tag{88}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = \dot{\theta}\boldsymbol{e} \tag{89}$$

となる．式 (87) に左から $e^{\times}$ を掛けると

$$e^{\times\,B}\omega = \left\{\sin\theta e^{\times} - (1-\cos\theta)\,e^{\times}e^{\times}\right\}\dot{e} \tag{90}$$

となる．さらに，式 (85) に左から $(1-\cos\theta)e^{\times} - \sin\theta e^{\times}e^{\times}$ を掛け，$e^{\times}e^{\times}e^{\times} = -e^{\times}$ であることも考慮すれば

$$\begin{aligned}
\left\{(1-\cos\theta)\,e^{\times} - \sin\theta e^{\times}e^{\times}\right\}e^{\times\,B}\omega &= \left\{(1-\cos\theta)\,e^{\times} - \sin\theta e^{\times}e^{\times}\right\}\left\{\sin\theta e^{\times} - (1-\cos\theta)\,e^{\times}e^{\times}\right\}\dot{e} \\
&= 2\,(1-\cos\theta)\,e^{\times}\dot{e}
\end{aligned} \tag{91}$$

となる．式 (91) は次のように整理される．

$$\dot{e} = \frac{1}{2}\left(e^{\times} - \cot\frac{\theta}{2}e^{\times}e^{\times}\right){}^{B}\omega \tag{92}$$

式 (83)，(87)，(92) がオイラー回転軸および回転角と角速度の関係である．

5.3 オイラー角

前述の通り，剛体の回転（姿勢）は 3 つのパラメータで表現できる．直交座標系 A 系を基準とし，直交座標系 B 系を物体（剛体）固定系とすると，A 系から B 系への座標変換は 3 つの連続した単純回転変換で表現できる．A 系を基準として，1 回目の座標変換を $\boldsymbol{e}_1$ 軸回りの θ_1 回転（A 系から A' 系へ変換），2 回目の座標変換を $\boldsymbol{e}_2$ 軸回りの θ_2 回転（A' 系から A'' 系へ変換），3 回目の座標変換を $\boldsymbol{e}_3$ 軸回りの θ_3 回転（A'' 系から B 系へ変換）とする．A' 系，A'' 系について，基底ベクトルをそれぞれ $[\boldsymbol{a}']^{T} = [\boldsymbol{a}'_1,\ \boldsymbol{a}'_2,\ \boldsymbol{a}'_3]$，$[\boldsymbol{a}'']^{T} = [\boldsymbol{a}''_1,\ \boldsymbol{a}''_2,\ \boldsymbol{a}''_3]$ とする．このとき次式が成り立つ．

$$[\boldsymbol{a}'] = C^{A'/A}\,[\boldsymbol{a}] \tag{93}$$

$$[\boldsymbol{a}''] = C^{A''/A'}\,[\boldsymbol{a}'] = C^{A''/A'}C^{A'/A}\,[\boldsymbol{a}] \tag{94}$$

$$[\boldsymbol{b}] = C^{B/A''}\,[\boldsymbol{a}'] = C^{B/A''}C^{A''/A'}C^{A'/A}\,[\boldsymbol{a}] = C^{B/A}\,[\boldsymbol{a}] \tag{95}$$

式 (95) 中の ${}^{B/A}C$ を求める．以降，3 つの回転軸 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ をそれぞれ物体固定座標系 A 系，A' 系，A'' を基準に選ぶこととする．つまり，$\boldsymbol{e}_1 = [\boldsymbol{a}]^{T}e_1$，$\boldsymbol{e}_2 = [\boldsymbol{a}']^{T}e_2$，$\boldsymbol{e}_3 = [\boldsymbol{a}'']^{T}e_3$ と表す．すると各座標変換行列は式 (74) の定義を用いて次式のように表せる．

$$C^{A'/A} = C^{e_1}(\theta_1), \quad C^{A''/A'} = C^{e_2}(\theta_2), \quad C^{B/A''} = C^{e_3}(\theta_3) \tag{96}$$

$$C^{B/A} = C^{e_3}(\theta_3)\,C^{e_2}(\theta_2)\,C^{e_1}(\theta_1) \tag{97}$$

角速度は式 (52)，(89) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{B/A} &= \dot{\theta}_1 \boldsymbol{e}_1 + \dot{\theta}_2 \boldsymbol{e}_2 + \dot{\theta}_3 \boldsymbol{e}_3 \\ &= \dot{\theta}_1 \left[\boldsymbol{a}\right]^T e_1 + \dot{\theta}_2 \left[\boldsymbol{a}'\right]^T e_2 + \dot{\theta}_3 \left[\boldsymbol{a}''\right]^T e_3\end{aligned} \tag{98}$$

と表される．したがって，$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\boldsymbol{b}]^T {}^B\omega = [\boldsymbol{a}]^T {}^A\omega$ と成分表示するとき，${}^B\omega$，${}^A\omega$ はそれぞれ次式のようになる．

$$\begin{aligned}{}^B\omega &= \dot{\theta}_1 \left[\boldsymbol{b}\right]\left[\boldsymbol{a}\right]^T e_1 + \dot{\theta}_2 \left[\boldsymbol{b}\right]\left[\boldsymbol{a}'\right]^T e_2 + \dot{\theta}_3 \left[\boldsymbol{b}\right]\left[\boldsymbol{a}''\right]^T e_3 \\ &= \dot{\theta}_1 C^{e_3}(\theta_3) C^{e_2}(\theta_2) C^{e_1}(\theta_1) e_1 + \dot{\theta}_2 C^{e_3}(\theta_3) C^{e_2}(\theta_2) e_2 + \dot{\theta}_3 C^{e_3}(\theta_3) e_3 \\ &= \dot{\theta}_1 C^{e_3}(\theta_3) C^{e_2}(\theta_2) e_1 + \dot{\theta}_2 C^{e_3}(\theta_3) e_2 + \dot{\theta}_3 e_3\end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned}{}^A\omega &= \dot{\theta}_1 \left[\boldsymbol{a}\right]\left[\boldsymbol{a}\right]^T e_1 + \dot{\theta}_2 \left[\boldsymbol{a}\right]\left[\boldsymbol{a}'\right]^T e_2 + \dot{\theta}_3 \left[\boldsymbol{a}\right]\left[\boldsymbol{a}''\right]^T e_3 \\ &= \dot{\theta}_1 e_1 + \dot{\theta}_2 C^{e_1}(\theta_1)^T e_2 + \dot{\theta}_3 C^{e_1}(\theta_1)^T C^{e_2}(\theta_2)^T e_3\end{aligned} \tag{100}$$

$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ としてそれぞれ A 系，A' 系，A'' 系の基底ベクトルのいずれかをとることが多い．このとき，それぞれ A 系の i 軸，A' 系の j 軸，A'' 系の k 軸（$i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$）を選ぶとすると，任意の回転を表現するためには $i \neq j$，$j \neq k$ でなければならない．したがって軸の選び方は i-j-k（i，j，k が全て異なる場合）または i-j-i（$i \neq j,\ i = k$ の場合）の 2 種類に分類され，それぞれ 6 通り，計 12 通りの選び方が存在する．これらの角をオイラー角（Euler angle）と呼ぶ．前節のオイラー回転軸や回転角とは異なることに注意されたい．オイラー角を用いる場合，$C^{e_1}(\theta_1)$，$C^{e_2}(\theta_2)$，$C^{e_3}(\theta_3)$ はそれぞれ，式 (76) の定義を用いて $C_i(\theta_1)$，$C_j(\theta_2)$，$C_k(\theta_3)$（または $C_i(\theta_3)$）に，e_1，e_2，e_3 は軸に応じて $[1,\ 0,\ 0]^T$ または $[0,\ 1,\ 0]^T$ または $[0,\ 0,\ 1]^T$ に置き換えて考える．

代表的な例として，宇宙機の姿勢表現によく用いられる 3-2-1 オイラー角（図 3）を考える．$\psi = \theta_1$，$\theta = \theta_2$，$\phi = \theta_3$ とし，それぞれヨー角（yaw angle，$\boldsymbol{e}_3$ 軸回り），ピッチ角（pitch angle，$\boldsymbol{e}_2$ 軸回り），ロール角（roll angle，$\boldsymbol{e}_1$ 軸回り）と呼ぶ．A 系から B 系への座標変換行列は

$$\begin{aligned}C^{B/A} &= C_1(\phi) C_2(\theta) C_3(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{101}$$

であり，角速度ベクトルの B 系における成分は式 (99) より

$$\begin{aligned}{}^B\omega &= \dot{\psi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{102}$$

となる．式 (102) を逆に解くと，$\vartheta = [\phi,\ \theta,\ \psi]^T$ として

$$\dot{\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\sin\phi\sin\theta}{\cos\theta} & -\dfrac{\cos\phi\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\omega_1 \\ {}^B\omega_2 \\ {}^B\omega_3 \end{bmatrix} \tag{103}$$

となる．$\theta = \pi/2 + n\pi$（n は整数）は特異点であることが分かる．

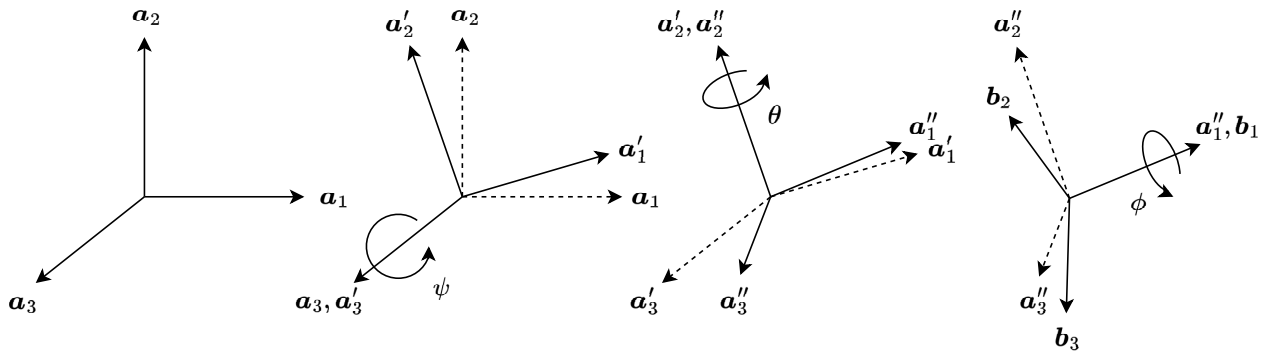


図 3　3-2-1 オイラー角による回転変換のイメージ.

5.4　クォータニオン（オイラーパラメータ）

A 系から B 系への座標変換に関するオイラー回転軸 e および回転角 θ に対して，$\bar{q}$ を次のように定義する.

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q \end{bmatrix} \tag{104}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{105}$$

$$q_0 = \cos\frac{\theta}{2}, \quad q_1 = e_1 \sin\frac{\theta}{2}, \quad q_2 = e_2 \sin\frac{\theta}{2}, \quad q_3 = e_3 \sin\frac{\theta}{2} \tag{106}$$

ただし,

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{107}$$

が成り立つ．$\bar{q}$ をクォータニオン（quaternion）またはオイラーパラメータ（Euler parameter）と呼ぶ．パラメータの数は 4 つと冗長であるが, 式 (107) が拘束条件となるので自由度は 3 である．オイラー角と異なり特異点が存在しないことが利点である．$\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = 2q_0^2 - 1$, $\sin\theta = 2q_0 \sin(\theta/2)$, $ee^T = qq^T / \sin^2(\theta/2) = qq^T/(1-q_0^2)$, $e^\times = q^\times / \sin(\theta/2)$ であることに注意すると，式 (69) から

$$\begin{aligned} C^{B/A} &= \left(2q_0^2 - 1\right) E + 2qq^T - 2q_0 q^\times \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_1 q_2 + q_0 q_3\right) & 2\left(q_1 q_3 - q_0 q_2\right) \\ 2\left(q_1 q_2 - q_0 q_3\right) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_2 q_3 + q_0 q_1\right) \\ 2\left(q_1 q_3 + q_0 q_2\right) & 2\left(q_2 q_3 - q_0 q_1\right) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{108}$$

また，式 (108) の逆の関係として次式が成り立つ.

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}}{2} \tag{109}$$

$$q_1 = \frac{\mathrm{sgn}\left(C_{23} - C_{32}\right)\sqrt{1 + C_{11} - C_{22} - C_{33}}}{2} \tag{110}$$

$$q_2 = \frac{\mathrm{sgn}\left(C_{31} - C_{13}\right)\sqrt{1 - C_{11} + C_{22} - C_{33}}}{2} \tag{111}$$

$$q_3 = \frac{\mathrm{sgn}\left(C_{12} - C_{21}\right)\sqrt{1 - C_{11} - C_{22} + C_{33}}}{2} \tag{112}$$

角速度は式 (87) より整理すると次式のように表せる.

$${}^B\omega_1 = 2\left(-q_1\dot{q}_0 + q_0\dot{q}_1 + q_3\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_3\right) \tag{113}$$

$${}^B\omega_2 = 2\left(-q_2\dot{q}_0 - q_3\dot{q}_1 + q_0\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_3\right) \tag{114}$$

$${}^B\omega_3 = 2\left(-q_3\dot{q}_0 + q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 + q_0\dot{q}_3\right) \tag{115}$$

すなわち

$$
{}^{B}\omega = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{116}
$$

となる．式 (107) の時間微分も含めてまとめると

$$
\begin{bmatrix} {}^{B}\omega_1 \\ {}^{B}\omega_2 \\ {}^{B}\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{117}
$$

となる．式 (117) を逆に解くことで，次のようにクォータニオンの時間微分が得られる．

$$
\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_0 \\ q_0 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_0 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_0 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\omega_1 \\ {}^{B}\omega_2 \\ {}^{B}\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\omega_1 \\ {}^{B}\omega_2 \\ {}^{B}\omega_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{118}
$$

6 おわりに

回転の表現方法は，問題に応じて適切なものを選択する．例えば，姿勢変動が小さいことが分かっている場合は，直感的に理解しやすいオイラー角を用いることも多いが，姿勢変動が大きくなる可能性がある問題では，特異点を回避するためにクォータニオンを用いるのが一般的である．