姿勢動力学

中条 俊大

最終改訂: 2026 年 8 月

本資料は，東京工業大学の松永三郎教授の講義資料（宇宙ステーション入門（東京大学出版会）の 6 章の抜粋をベースに修正・追記したもの）をもとに作成したものである．内容を一部削減し，変数の定義などは一部変更している．

1 はじめに

宇宙機の姿勢運動における動力学（dynamics）とは，質量や慣性モーメントなどの慣性量と力やトルクとの間の関係を考える学問である．運動学で導出した微分方程式と合わせて宇宙機の運動を解くために，角速度の時間微分と外部トルクの関係を求めることが目的である．本稿では，単一の剛体の角運動量の定義を出発点とし，慣性行列の定義，運動方程式の導出を行った後，代表的な応用として地球周回軌道上の宇宙機の姿勢運動の解析を行う．

2 角運動量

以下，宇宙機を単一の剛体とみなす．A 系を慣性座標系，B 系を機体固定座標系とする．図 1 を参照されたい．宇宙機上の参照点 O 周りに関する姿勢の運動方程式を求める．微小質量 $\mathrm{d}m$ にはたらく外力を $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$，内力を $\mathrm{d}\boldsymbol{f}'$ とすると，運動方程式

$$\ddot{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}m = \mathrm{d}\boldsymbol{f} + \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \tag{1}$$

に対して左から $\boldsymbol{r}$ を外積し，宇宙機全体で積分すると

$$\int_V \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}m = \int_V \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{T}_O \tag{2}$$

となる．$\boldsymbol{T}_O$ は宇宙機にはたらく O 周りの全外部トルクである．また，ドットは A 系（慣性座標系）における時間微分を表すこととし，$\int_V \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{0}$ である（作用・反作用の法則による）ことを用いた．次に，点 C を宇宙機の質量中心とすると

$$\int_V \boldsymbol{\rho}\mathrm{d}m = \boldsymbol{0},\ \int_V \boldsymbol{r}\mathrm{d}m = m\boldsymbol{r}_C \tag{3}$$

が成り立つ．m は宇宙機の全質量である．

$$\int_V \mathrm{d}m = m \tag{4}$$

したがって

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_O + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_O + \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\rho} \tag{5}$$

を式 (2) に代入すると次式が得られる．

$$\int_V \boldsymbol{r} \times \left(\ddot{\boldsymbol{R}}_O + \ddot{\boldsymbol{r}}\right)\mathrm{d}m = \boldsymbol{T}_O \tag{6}$$

$$\iff \int_V \boldsymbol{r}\mathrm{d}m \times \ddot{\boldsymbol{R}}_O + \int_V \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}m = \boldsymbol{T}_O \tag{7}$$

$$\iff \dot{\boldsymbol{H}}_O + m\boldsymbol{r}_C \times \ddot{\boldsymbol{R}}_O = \boldsymbol{T}_O \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{H}_O$ は点 O 周りの宇宙機の角運動量である．

$$\boldsymbol{H}_O = \int_V \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}m \tag{9}$$

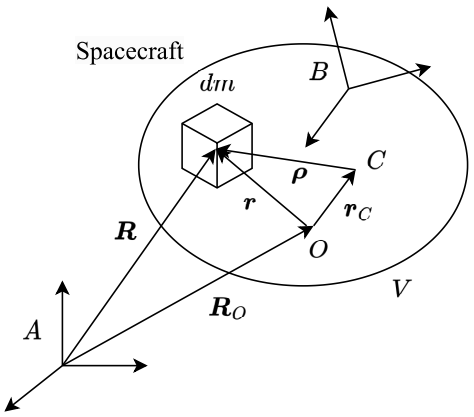


図 1　慣性座標系と機体固定座標系および宇宙機モデルのイメージ.

参照点 O が慣性座標系に対して静止または等速直線運動する（$\ddot{\boldsymbol{R}}_O = \boldsymbol{0}$），または質量中心に一致する（$\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{0}$）場合，式 (8) は次式のようになる.

$$\dot{\boldsymbol{H}}_O = \boldsymbol{T}_O \tag{10}$$

したがって，回転運動と並進運動は分離されることになる．このことから，姿勢運動の解析には参照点 O を宇宙機の質量中心 C に取ることが多い．外部トルクがはたらかない，すなわち $\boldsymbol{T}_O = \boldsymbol{0}$ の場合,

$$\boldsymbol{H}_O = \text{const.} \tag{11}$$

となり，角運動量は保存される.

並進運動については，式 (1) を宇宙機全体で積分することにより次式が得られる.

$$m\ddot{\boldsymbol{R}}_O + m\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} \tag{12}$$

ここで，$\boldsymbol{f}$ は宇宙機にはたらく全外力である．参照点 C を宇宙機の質量中心 c に取る場合,

$$m\ddot{\boldsymbol{R}}_O = \boldsymbol{f} \tag{13}$$

となる.

3　慣性行列

以降，宇宙機の質量中心周りの角運動量について考える．これと $\boldsymbol{H}$ とすると,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \int_V \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \mathrm{d}m \\
&= \int_V \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{B/A} \times \boldsymbol{\rho} \right) \mathrm{d}m \\
&= \int_V \left\{ (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\, \boldsymbol{\omega}^{B/A} - \left(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}^{B/A} \right) \boldsymbol{\rho} \right\} \mathrm{d}m \\
&= \int_V \left\{ (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\, \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho} \right\} \mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{\omega}^{B/A} \\
&= \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}^{B/A}
\end{aligned} \tag{14}$$

となる．ここで，ドットはベクトルの内積またはダイアディックとベクトルの積を表し,

$$\boldsymbol{I} = \int_V \left\{ (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\, \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho} \right\} \mathrm{d}m \tag{15}$$

を慣性ダイアディックと呼ぶ．$\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{b}]^T \rho$ として，式 (15) を B 系で成分表示すると

$$\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{b}]^T \int_V \left\{ \left(\rho^T \rho \right) E - \rho \rho^T \right\} \mathrm{d}m \cdot [\boldsymbol{b}] \equiv [\boldsymbol{b}]^T\, I\, [\boldsymbol{b}] \tag{16}$$

となる．

$$I = \int_V \left\{ \left(\rho^T \rho\right) E - \rho\rho^T \right\} \mathrm{d}m \tag{17}$$

は慣性行列と呼ばれ，次式のように計算される正定値対称行列である．

$$\begin{aligned} I &= \int_V \begin{bmatrix} \rho_2^2+\rho_3^2 & -\rho_1\rho_2 & -\rho_3\rho_1 \\ -\rho_1\rho_2 & \rho_3^2+\rho_1^2 & -\rho_2\rho_3 \\ -\rho_3\rho_1 & -\rho_2\rho_3 & \rho_1^2+\rho_2^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}m \\ &\equiv \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

ただし，$\rho = [\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3]^T$ とした（以降，上付き文字 B は省略する）．また，次の不等式が成り立つことが容易に確認できる．

$$I_{11} > 0, \quad I_{22} > 0, \quad I_{33} > 0 \tag{19}$$

$$I_{11} + I_{22} > I_{33}, \quad I_{22} + I_{33} > I_{11}, \quad I_{33} + I_{11} > I_{22} \tag{20}$$

任意の参照点 O 周りの慣性ダイアディック $\boldsymbol{I}_O$ は，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\rho}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_O &= \int_V \left\{ (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r} \right\} \mathrm{d}m \\ &= \boldsymbol{I} + m\left\{ (\boldsymbol{r}_C\cdot\boldsymbol{r}_C)\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{r}_C\boldsymbol{r}_C \right\} \end{aligned} \tag{21}$$

と表現できる．同様に慣性行列 I_O は，$\boldsymbol{r}_C = [\boldsymbol{b}]^T r_C$ として

$$I_O = I + m\left\{ \left(r_C^T r_C\right) E - r_C r_C^T \right\} \tag{22}$$

となる．これを平行軸の定理と呼ぶ．

I が正定値対称行列であることから，3 つの正の実数の固有値 J_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ および対応する固有ベクトル d_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ が存在することが分かる．したがって，正規直交行列 $D = [d_1,\ d_2,\ d_3]$ に対して

$$D^T I D = \mathrm{diag}\,(J_1,\ J_2,\ J_3) \equiv J \tag{23}$$

と対角化できる．$[\boldsymbol{c}] = D^T[\boldsymbol{b}]$ なる C 系を考えると

$$\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{b}]^T\, I\, [\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{c}]^T\, D^T I D\, [\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{c}]^T\, J\, [\boldsymbol{c}] \tag{24}$$

となることから，この C 系の座標軸 $\boldsymbol{c}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ を慣性主軸，J_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ を主慣性モーメントと呼ぶ．

式 (14) を B 系で成分表示すると，$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{b}]^T H$，$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\boldsymbol{b}]^T \omega$

$$H = I\omega \tag{25}$$

すなわち，$H = [H_1,\ H_2,\ H_3]^T$，$\omega = [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]^T$ として

$$H_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \tag{26}$$

$$H_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \tag{27}$$

$$H_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \tag{28}$$

となる．

最後に，宇宙機の運動エネルギー T は次式のように表される．

$$T = \frac{1}{2}\int_V \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}m = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{R}}_C\cdot\dot{\boldsymbol{R}}_C + \frac{1}{2}\int_V \dot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{d}m \equiv T_{\mathrm{trans}} + T_{\mathrm{rot}} \tag{29}$$

ただし，$\boldsymbol{R}_C = \boldsymbol{R}_O + \boldsymbol{r}_C$ であり，

$$T_{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{R}}_C\cdot\dot{\boldsymbol{R}}_C \tag{30}$$

は質量中心の並進運動のエネルギー，

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2}\int_V \dot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\int_V \dot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}^{B/A}\times\boldsymbol{\rho}\right)\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{B/A}\cdot\int_V \left(\boldsymbol{\rho}\times\dot{\boldsymbol{\rho}}\right)\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{B/A}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{B/A}\cdot\left(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega}^{B/A}\right) \\
&= \frac{1}{2}\omega^T H = \frac{1}{2}\omega^T I\omega
\end{aligned}
\tag{31}
$$

は質量中心周りの回転運動のエネルギーである．すなわち，並進と回転の運動エネルギーの和として表される．

4 運動方程式

以降はドットは通常の時間微分を表すものとし，A 系を基準とする（A 系から見た）時間微分の演算子を $\frac{{}^A\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と定義する（本稿のこれまでの定義と異なるので注意）．改めて，宇宙機の質量中心周りの慣性ダイアディック $\boldsymbol{I}$，慣性座標系（A 系）に対する機体固定座標系（B 系）の角速度 $\boldsymbol{\omega}^{B/A}$，慣性座標系に対する宇宙機の質量中心周りの角運動量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}^{B/A}$，質量中心周りの外部トルク $\boldsymbol{T}$ に対して，式 (10) は次式のように書き直せる．

$$
\frac{{}^A\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T} \tag{32}
$$

式 (32) は次のように変形できる．

$$
\frac{{}^B\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}^{B/A}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{T} \tag{33}
$$

$$
\boldsymbol{I}\cdot\frac{{}^B\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^{B/A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}^{B/A}\times\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega}^{B/A} = \boldsymbol{T} \tag{34}
$$

したがって，式 (33)，(34) を B 系で成分表示すると，$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{b}]^T H$，$\boldsymbol{I}=[\boldsymbol{b}]^T I[\boldsymbol{b}]$，$\boldsymbol{\omega}^{B/A}=[\boldsymbol{b}]^T\omega$，$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{b}]^T T$ としてそれぞれ次のようになる．

$$
\dot{H} + \omega^{\times} H = T \tag{35}
$$

$$
I\dot{\omega} + \omega^{\times} I\omega = T \tag{36}
$$

一般に式 (36) を展開すると次式のようになる．

$$
\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}
\tag{37}
$$

機体固定座標系を，その基底ベクトルが慣性主軸に一致するように定める場合，すなわち $I=\mathrm{diag}(J_1,\ J_2,\ J_3)$ の場合，式 (37) は次式のように簡単化される．

$$
J_1\dot{\omega}_1 - (J_2-J_3)\,\omega_2\omega_3 = T_1 \tag{38}
$$

$$
J_2\dot{\omega}_2 - (J_3-J_1)\,\omega_3\omega_1 = T_2 \tag{39}
$$

$$
J_3\dot{\omega}_3 - (J_1-J_2)\,\omega_1\omega_2 = T_3 \tag{40}
$$

以上の運動方程式は宇宙機の角速度の時間微分を表現するものである．一方，運動学に基づいた微分方程式は姿勢パラメータ（オイラー角，クォータニオンなど）の時間微分を角速度で表現するものである．したがって宇宙機の姿勢運動を解く際は，これらの微分方程式を連立して解く必要がある．後者は姿勢パラメータのとり方により異なることに注意されたい．

例として，姿勢表現に 2-3-1 オイラー角（ピッチ-ヨー-ロール）を用いる場合を考える．ピッチ角を θ，ヨー角を ψ，ロール角を ϕ，$\vartheta = [\phi,\ \theta,\ \psi]^T$，$\omega = [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]^T$ として

$$
\begin{aligned}
C^{B/A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ \sin\phi\cos\theta\sin\psi + \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\psi & -\sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega &= \dot{\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \sin\psi & 0 \\ 0 & \cos\phi\cos\psi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi\cos\psi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{42}
$$

$$
\dot{\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\cos\phi\sin\psi}{\cos\psi} & \dfrac{\sin\phi\sin\psi}{\cos\psi} \\ 0 & \dfrac{\cos\phi}{\cos\psi} & -\dfrac{\sin\phi}{\cos\psi} \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \tag{43}
$$

となる．導出の詳細は「姿勢運動学」を参照されたい．姿勢運動を解く際は，式 (37) に直接式 (42) を代入して ϕ，θ，ψ の 2 階微分方程式に帰着させて解くか，式 (37) と式 (43) を連立して θ，ψ，ϕ，ω_1，ω_2，ω_3 の 1 階部分方程式とみなして解けばよい．特異点（$\psi = \pi/2 + n\pi$（n は整数））には注意が必要である．

5 地球周回軌道上の宇宙機の姿勢運動

5.1 運動方程式

地球周回軌道上の宇宙機の姿勢の運動方程式を求める．図 2 のように，地球中心慣性座標系（N 系），局所垂直水平（Local Vertical Local Horizontal (LVLH)）座標系（A 系，$[\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3]^T$），機体固定座標系（$B$ 系，$[\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3]^T$）を定義する．$\boldsymbol{a}_3$ は地心方向単位ベクトル，$\boldsymbol{a}_1$ は軌道面内進行方向単位ベクトル，$\boldsymbol{a}_2$ はこれらから決まる軌道面外単位ベクトルである．このとき

- 座標変換関係式:
$$[\boldsymbol{b}] = C^{B/A}\,[\boldsymbol{a}] \tag{44}$$
- 軌道角速度:
$$\boldsymbol{\omega}^{A/N} = -\dot{f}\boldsymbol{a}_2 \tag{45}$$
- LVLH 系に対する宇宙機の角速度:
$$\boldsymbol{\omega}^{B/A} = [\boldsymbol{b}]^T\,\omega^{B/A} \tag{46}$$
- 慣性系に対する宇宙機の角速度:
$$\boldsymbol{\omega}^{B/N} = \boldsymbol{\omega}^{B/A} - \dot{f}\boldsymbol{a}_2 = [\boldsymbol{b}]^T\,\omega \tag{47}$$

と書ける．ただし，$\dot{f}$ は宇宙機の真近点離角 f の時間微分である．ここでは，簡単のため軌道は円軌道であるとすると，

$$\dot{f} = n = \sqrt{\frac{\mu}{|\boldsymbol{R}_C^3|}} \tag{48}$$

である．μ は地球の重力定数である．

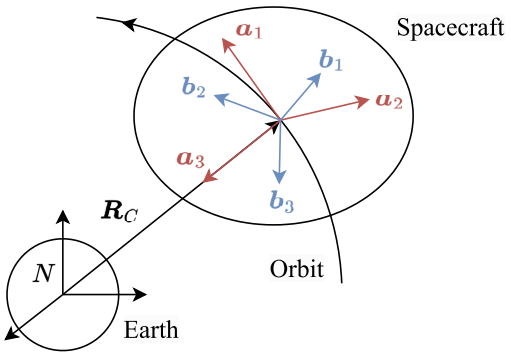


図 2　地球中心慣性座標系と軌道面基準回転座標系および機体固定座標系のイメージ.

宇宙機の姿勢表現として LVLH 系に対する 2-3-1 オイラー角を考えると，ピッチ角を θ，ヨー角を ψ，ロール角を ϕ として式 (41)，(42)，(43) が成立する（ただし $\omega = [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]^T$ を $\omega^{B/A} = [\omega_1^{B/A},\ \omega_2^{B/A},\ \omega_3^{B/A}]^T$ に置き換えて考える）．また，

$$\boldsymbol{a}_2 = [\boldsymbol{b}]^T \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ C_{32} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}]^T \begin{bmatrix} \sin\psi \\ \cos\phi\cos\psi \\ -\sin\phi\cos\psi \end{bmatrix} \tag{49}$$

であることから，$\vartheta = [\phi,\ \theta,\ \psi]^T$，$\omega = [\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]^T$ として

$$\boldsymbol{\omega}^{B/N} = [\boldsymbol{b}]^T \begin{bmatrix} 1 & \sin\psi & 0 \\ 0 & \cos\phi\cos\psi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi\cos\psi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - n\,[\boldsymbol{b}]^T \begin{bmatrix} \sin\psi \\ \cos\phi\cos\psi \\ -\sin\phi\cos\psi \end{bmatrix} \tag{50}$$

したがって

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & \sin\psi & 0 \\ 0 & \cos\phi\cos\psi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi\cos\psi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} \sin\psi \\ \cos\phi\cos\psi \\ -\sin\phi\cos\psi \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$\dot{\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\cos\phi\sin\psi}{\cos\psi} & \dfrac{\sin\phi\sin\psi}{\cos\psi} \\ 0 & \dfrac{\cos\phi}{\cos\psi} & -\dfrac{\sin\phi}{\cos\psi} \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 + n\sin\psi \\ \omega_2 + n\cos\phi\cos\psi \\ \omega_3 - n\sin\phi\cos\psi \end{bmatrix} \tag{52}$$

が成り立つ．式 (51) または (52) と式 (37) をあわせたものが求めるべき運動方程式である．

宇宙機の姿勢が LVLH のごく近傍である場合，すなわち ϕ，θ，ψ，$\dot{\phi}$，$\dot{\theta}$，$\dot{\psi}$ が微小な場合，式 (49)，(51)，(52) はそれぞれ次のように近似できる．

$$\boldsymbol{a}_2 \approx [\boldsymbol{b}]^T \begin{bmatrix} \psi \\ 1 \\ \phi \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$\omega \approx \begin{bmatrix} \dot{\phi} - n\psi \\ \dot{\theta} - n \\ \dot{\psi} + n\phi \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\dot{\vartheta} \approx \begin{bmatrix} \omega_1 + n\psi \\ \omega_2 + n \\ \omega_3 - n\phi \end{bmatrix} \tag{55}$$

$\omega_1^2 \approx 0$，$\omega_2^2 \approx -2n\omega_2 - n^2$，$\omega_3^2 \approx 0$，$\omega_1\omega_2 \approx -n\omega_1$，$\omega_1\omega_3 \approx 0$，$\omega_2\omega_3 \approx -n\omega_3$ であることに注意すると，式 (37) は次式のように角速度を用いた表式として近似される．

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} -I_{31} & -2I_{32} & I_{22} - I_{33} \\ I_{32} & 0 & -I_{12} \\ I_{11} - I_{22} & 2I_{12} & I_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + n^2 \begin{bmatrix} -I_{32} \\ 0 \\ I_{12} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{56}$$

さらに

$$\dot{\omega} \approx \begin{bmatrix} \ddot{\phi} - n\dot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} + n\dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{57}$$

であることに注意すると，式 (37) はオイラー角を用いた表式として次式のように近似される．

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & -2I_{32} & -I_{11} + I_{22} - I_{33} \\ 2I_{32} & 0 & -2I_{12} \\ I_{11} - I_{22} + I_{33} & 2I_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &\qquad + n^2 \begin{bmatrix} I_{22} - I_{33} & 0 & I_{31} \\ -I_{12} & 0 & -I_{32} \\ I_{13} & 0 & -I_{11} + I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + n^2 \begin{bmatrix} -3I_{32} \\ 0 \\ 3I_{12} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{58}$$

さらに機体固定座標系の基底ベクトルを慣性主軸に一致するように定める場合，すなわち $I = \mathrm{diag}(J_1,\ J_2,\ J_3)$ の場合，式 (58) は次式のようになる．

- ロール:

$$J_1\ddot{\phi} - n\left(J_1 - J_2 + J_3\right)\dot{\psi} + n^2\left(J_2 - J_3\right)\phi = T_1 \tag{59}$$

- ピッチ:

$$J_2\ddot{\theta} = T_2 \tag{60}$$

- ヨー:

$$J_3\ddot{\psi} + n\left(J_1 - J_2 + J_3\right)\dot{\phi} - n^2\left(J_1 - J_2\right)\psi = T_3 \tag{61}$$

なお，式 (53) の以降の数式処理の中ではピッチ角 θ が微小であることは利用されておらず，したがって θ が比較的大きく他が微小近似できる場合もこれらの式は有効である．また式 (58) および式 (59)，(60)，(61) の n を $\dot{f}$ に置き換えれば楕円軌道上の運動方程式となる．

5.2 重力傾斜トルク

重力の影響により地球周回軌道上の宇宙機に作用するトルクを求める．改めて図 1，2 を参照されたい．ここでは，図 1 の A 系は N 系に置き換えて考えるものとする．このとき

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\rho} \tag{62}$$

であり，微小質量 $\mathrm{d}m$ にはたらく重力（万有引力）は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = -\frac{\mu \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}\mathrm{d}m \tag{63}$$

である．このとき質量中心 C 周りにはたらくトルク

$$\boldsymbol{T}_G = \int_V \boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\boldsymbol{f} \tag{64}$$

を重力傾斜トルクと呼ぶ．ここで，$|\boldsymbol{R}_C| \gg |\boldsymbol{\rho}|$ であることから，次式の近似が成り立つ．

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\boldsymbol{R}|^3} &= \frac{1}{|\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\rho}|^3} = \left\{(\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\rho}) \cdot (\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\rho})\right\}^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx \frac{1}{|\boldsymbol{R}_C|^3}\left(1 - 3\frac{\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{R}_C|^2}\right) \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3} &\approx \frac{\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{R}_C|^3}\left(1 - 3\frac{\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{R}_C|^2}\right) \\ &\approx \frac{\boldsymbol{R}_C}{|\boldsymbol{R}_C|^3} - 3\frac{\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{R}_C|^5}\boldsymbol{R}_C \end{aligned} \tag{66}$$

したがって，式 (64) は次のように近似できる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_G &\approx -\int_V \boldsymbol{\rho}\times\mu\left(\frac{\boldsymbol{R}_C}{|\boldsymbol{R}_C|^3}-3\frac{\boldsymbol{R}_C\cdot\boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{R}_C|^5}\boldsymbol{R}_C\right)\mathrm{d}m\\ &=\frac{3\mu}{|\boldsymbol{R}_C|^5}\int_V(\boldsymbol{R}_C\cdot\boldsymbol{\rho})\,(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{R}_C)\,\mathrm{d}m\end{aligned} \tag{67}$$

ここで，式 (15) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_C\times(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{R}_C)&=\left[\boldsymbol{R}_C\times\int_V\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho})\,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}\}\,\mathrm{d}m\right]\cdot\boldsymbol{R}_C\\ &=-\int_V(\boldsymbol{R}_C\times\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho})\cdot\boldsymbol{R}_C\mathrm{d}m\\ &=\int_V(\boldsymbol{R}_C\cdot\boldsymbol{\rho})\,(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{R}_C)\,\mathrm{d}m\end{aligned} \tag{68}$$

が成り立つため，式 (67) は次のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{T}_G\approx\frac{3\mu}{|\boldsymbol{R}_C|^5}(\boldsymbol{R}_C\times\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{R}_C \tag{69}$$

さらに，

$$\boldsymbol{a}_3=-\frac{\boldsymbol{R}_C}{|\boldsymbol{R}_C|} \tag{70}$$

であることと，式 (48) を用いると，式 (69) は次のようにも表せる．

$$\boldsymbol{T}_G\approx 3n^2(\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{a}_3 \tag{71}$$

ここで，

$$\boldsymbol{a}_3=[\boldsymbol{b}]^T\begin{bmatrix}C_{13}\\C_{23}\\C_{33}\end{bmatrix} \tag{72}$$

であるので，式 (71) を機体固定座標系で成分表示すると次のようになる．

$$T_G\approx 3n^2\begin{bmatrix}0&-C_{33}&C_{23}\\C_{33}&0&-C_{13}\\-C_{23}&C_{13}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{11}&I_{12}&I_{13}\\I_{21}&I_{22}&I_{23}\\I_{31}&I_{32}&I_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{13}\\C_{23}\\C_{33}\end{bmatrix} \tag{73}$$

ただし $\boldsymbol{T}_{\mathrm{G}}=[\boldsymbol{b}]^T T_{\mathrm{G}}$ である．宇宙機の姿勢が LVLH のごく近傍である場合，

$$\begin{bmatrix}C_{13}\\C_{23}\\C_{33}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-\theta\\\phi\\1\end{bmatrix} \tag{74}$$

となるので，式 (73) は

$$\begin{aligned}T_G&\approx 3n^2\begin{bmatrix}0&-1&\phi\\1&0&-\theta\\-\phi&-\theta&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{11}&I_{12}&I_{13}\\I_{21}&I_{22}&I_{23}\\I_{31}&I_{32}&I_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\theta\\\phi\\1\end{bmatrix}\\ &=3n^2\begin{bmatrix}-I_{22}+I_{33}&I_{21}&0\\I_{12}&-I_{11}+I_{33}&0\\-I_{13}&-I_{23}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\\theta\\\psi\end{bmatrix}+3n^2\begin{bmatrix}-I_{23}\\I_{13}\\0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{75}$$

となる．したがって式 (56) に適用すると次式のように書き直せる．

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}I_{11}&I_{12}&I_{13}\\I_{21}&I_{22}&I_{23}\\I_{31}&I_{32}&I_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\omega_1\\\dot\omega_2\\\dot\omega_3\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}-I_{31}&-2I_{32}&I_{22}-I_{33}\\I_{32}&0&-I_{12}\\I_{11}-I_{22}&2I_{12}&I_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix}\\ &\qquad+3n^2\begin{bmatrix}I_{22}-I_{33}&-I_{21}&0\\-I_{12}&I_{11}-I_{33}&0\\I_{13}&I_{23}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\\theta\\\psi\end{bmatrix}+n^2\begin{bmatrix}2I_{32}\\-3I_{13}\\0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{76}$$

ここで，$[d_1,\ d_2,\ d_3]^T$ は重力傾斜トルク以外の外部トルクである．また，式 (58) は次式のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & -2I_{32} & -I_{11}+I_{22}-I_{33} \\ 2I_{32} & 0 & -2I_{12} \\ I_{11}-I_{22}+I_{33} & 2I_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ + n^2 \begin{bmatrix} 4\left(I_{22}-I_{33}\right) & -3I_{21} & I_{31} \\ -4I_{12} & 3\left(I_{11}-I_{33}\right) & -I_{32} \\ 4I_{13} & 3I_{23} & -I_{11}+I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{77}$$

さらに機体固定座標系の基底ベクトルを慣性主軸に一致するように定める場合，すなわち $I = \mathrm{diag}(J_1,\ J_2,\ J_3)$ の場合，式 (77) は次式のようになる．

- ロール:

$$J_1\ddot{\phi} - n\left(J_1 - J_2 + J_3\right)\dot{\psi} + 4n^2\left(J_2 - J_3\right)\phi = d_1 \tag{78}$$

- ピッチ:

$$J_2\ddot{\theta} + 3n^2\left(J_1 - J_3\right)\theta = d_2 \tag{79}$$

- ヨー:

$$J_3\ddot{\psi} + n\left(J_1 - J_2 + J_3\right)\dot{\phi} - n^2\left(J_1 - J_2\right)\psi = d_3 \tag{80}$$

ロールとヨーがカップリングする一方，ピッチについては独立した運動を行うことが分かる．

5.3 安定性解析

LVLH 近傍における姿勢運動の安定性を調べる．ここでは式 (78)，(79)，(80) を適用し，線形安定性解析を行う．重力傾斜トルク以外の外部トルクは無視する（$d_1 = d_2 = d_3 = 0$）．まずピッチ軸回りの運動に注目すると，$J_1 > J_3$ の場合，式 (79) は次式のように解ける．

$$\theta = A\cos\left(\omega_p t + \alpha\right) \tag{81}$$

ただし t は時刻，A，α は積分定数であり，

$$\omega_p = n\sqrt{\frac{3\left(J_1 - J_3\right)}{J_2}} = n\sqrt{3k_2} \tag{82}$$

$$k_2 = \frac{J_1 - J_3}{J_2}, \quad -1 \le k_2 \le 1 \tag{83}$$

とする．これよりピッチ軸回りの姿勢運動は角振動数 ω_p の非減衰振動となることが分かる．$J_1 < J_3$ の場合はピッチ角が発散する不安定運動となる．なお楕円軌道の場合はこれとは安定条件がやや異なるものになる．

次にロール軸およびヨー軸回りの運動に注目する．式 (78)，(80) をラプラス変換すると次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} s^2 + 4k_1n^2 & \left(k_1 - 1\right)ns \\ -\left(k_3 - 1\right)ns & s^2 + k_3n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi\left(s\right) \\ \psi\left(s\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{84}$$

ただし

$$k_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad -1 \le k_1 \le 1 \tag{85}$$

$$k_3 = \frac{J_2 - J_1}{J_3}, \quad -1 \le k_3 \le 1 \tag{86}$$

とする．式 (84) の特性方程式は次式のようになる．

$$\left(\frac{s}{n}\right)^4 + \left(3k_1 + k_1k_3 + 1\right)\left(\frac{s}{n}\right)^2 + 4k_1k_3 = 0 \tag{87}$$

運動がリアプノフ安定になるための必要十分条件は式 (87) の解が全て純虚数であることであり，次式と同値である．

$$\begin{cases} 3k_1 + k_1k_3 + 1 > 0 \\ k_1k_3 > 0 \\ \left(3k_1 + k_1k_3 + 1\right)^2 - 4 \cdot 4k_1k_3 > 0 \end{cases} \tag{88}$$

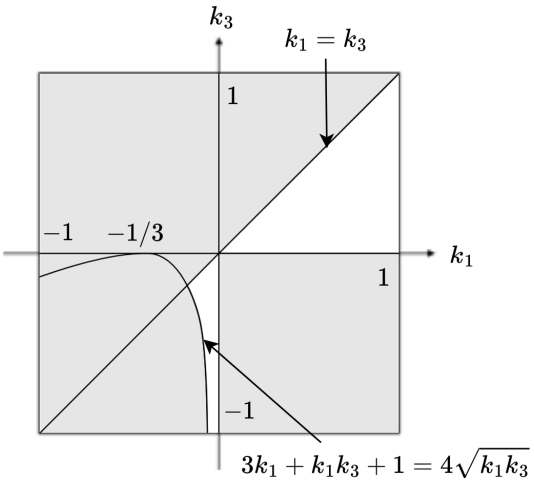


図 3　地球周回軌道上の宇宙機の姿勢の重力傾斜安定領域.

式 (88) は次のように整理される.

$$\begin{cases} k_1k_3 > 0 \\ 3k_1 + k_1k_3 + 1 > 4\sqrt{k_1k_3} \end{cases} \tag{89}$$

ピッチ軸回りの運動の安定条件 $J_1 > J_3$ は $k_1 > k_3$ と同値であること，および $k_2 = (k_1 - k_3)/(1 - k_1k_3)$ であることに注意すると，システム（全体）の安定性は図 3 のようにまとめられる（白地が安定領域）.

6　おわりに

LVLH 近傍の姿勢の重力傾斜安定条件は主慣性モーメントに依存することが分かった．本稿では外部トルクとして重力傾斜トルクのみを取り上げたが，より踏み込んだ解析では，空力や太陽輻射圧といった他の外部トルクの影響も考慮する．また本稿では円軌道上，LVLH のごく近傍における安定性解析を行ったが，ミッションによっては楕円軌道であること，またある姿勢角（例えばピッチ角）が比較的大きくなる場合も考慮した安定性解析が必要となる．これが不安定となる場合は，積極的な姿勢制御を行わなければならない.